11.01.2022, Vorlesung (8)

Ankündigungen: 1. Modulprüfung nicht durch Klausur, sondern durch Hausarbeit (siehe Webseite)

2. Nächste Woche ist doch Vorlesung (siehe auch Webseite); am 08.02. dann auch.

(2.8) Das 1. Keplersche Gesetz

(i) Die allgemeine Lösung zum linearen Pendel

$(\omega > 0)$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

war:

$$x(t) = x\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}}{\omega}\sin(\omega t).$$

Mit der trigonometrischen Formel

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, kann man dies so umschreiben:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \alpha),$$

wobei sich (A, α) aus $(x_0, \dot{x}_0)$ gegenseitig bestimmen:

$$x_0 = x(0) = A \cdot \cos(\alpha)$$
$$\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = -\omega A \sin(\alpha)$$

bzw.

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right).$$

A: Amplitude, α: Phasenverschiebung.

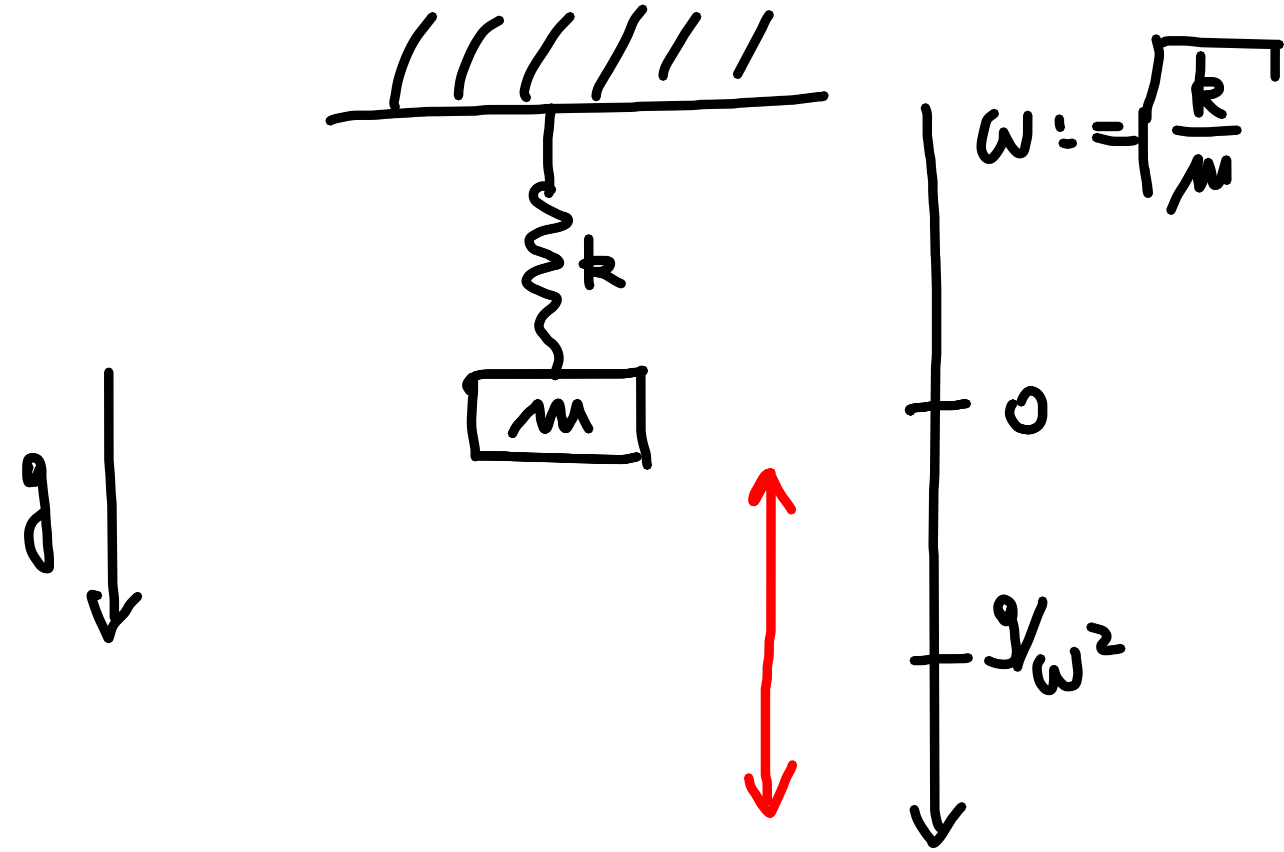
(ii) Da (*) linear ist, ergibt sich Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(**) \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = g$$

(mit $g > 0$) als Überlagerung von einer speziellen (z.B. durch Variation der Konstanten – oder durch Erraten) und der Lösung der homogenen Gleichung. Da $x(t) = g/\omega^2 =$ const. spezielle Lösung ist (Gleichgewichtslage), ist also die allgemeine Lösung von (**)

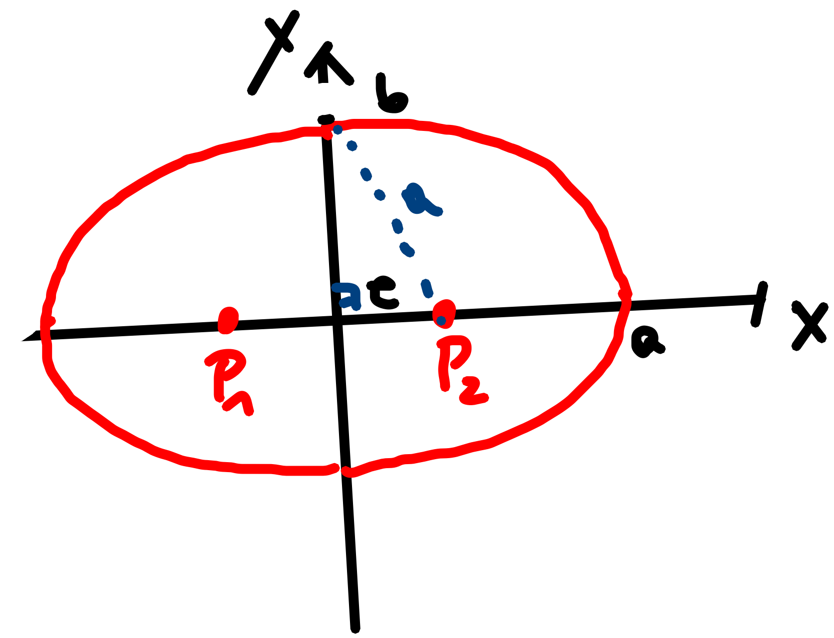
$$x(t) = \frac{g}{\omega^2} + A\cos(\omega t + \alpha),$$

wobei (A,α) von den Anf.-bedingungen abhängen. Z.B. schwingt beim „Federpendel" unter der Erdanziehung das Pendel harmonisch um seine Gleichgewichtslage,



(b) Erinnere: Die Ellipsengleichung mit den Halbachsen $0 \leq b \leq a$ in Mittelpunkts-form war:

$$C: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Die Brennpunkte P_1, P_2 liegen dann bei

$$P_1 = (-e, 0), \quad P_2 = (e, 0)$$

wobei mit Pythagoras

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad (0 \leq e \leq a)$$

ist. Mit

$$\varepsilon := \frac{e}{a} \qquad (0 \leq \varepsilon \leq 1)$$

wird die Exzentrizität von C bezeichnet.

Transformieren wir nun auf Polarkoordinaten mit Brennpunkt P_2 im Ursprung!

$$x - e = r \cdot \cos \theta$$
$$y = r \cdot \sin \theta$$

Dann erhält man:

$$1 = \frac{1}{a^2}(r\cos\theta + e)^2 + \frac{1}{b^2} r^2 \sin^2\theta$$

$$= \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) r^2 + \left(\frac{2e\cos\theta}{a^2}\right) r + \frac{e^2}{a^2}$$

$$\overset{b^2 = (1-\varepsilon^2)a^2}{=} \frac{1}{a^2}\left\{\left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{1-\varepsilon^2}\right) r^2 + (2\varepsilon a\cos\theta) r + \varepsilon^2 a^2\right\}$$

$$\Rightarrow a^2(1-\varepsilon^2) = \Big((1-\varepsilon^2)\cos^2\theta + \sin^2\theta\Big) r^2 + \big(2\varepsilon a(1-\varepsilon^2)\cos\theta\big) r + \varepsilon^2(1-\varepsilon^2)\cdot a^2\Big\}$$

$$\Rightarrow \lambda(r) := \Big(\underbrace{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}_{=:\alpha}\Big) r^2 + \Big(\underbrace{2\varepsilon a(1-\varepsilon^2)\cos\theta}_{=:\beta}\Big)\cdot r + \Big(\underbrace{-(1-\varepsilon^2)^2 a^2}_{=:\gamma}\Big) = 0$$

Beachte:

- $\lambda(0) = \gamma < 0$
- $\lim\limits_{r \to \pm\infty} \lambda(r) = +\infty$, da $\alpha > 0$

ZWS: Es gibt eine NS in $(-\infty, 0)$ und eine in $(0, \infty)$

Da $r > 0$ sein muss, ist

$$r = \frac{1}{2\alpha}\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\right) = \dots$$

$$= \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\theta} \qquad \text{mit } p := \frac{b^2}{a} \quad (\text{„Latus rectum"})$$

bzw.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\theta)$$

[Das wäre also die Lösung der inhomogenen Pendelgleichung mit $\omega = 1$, $g = \frac{1}{p}$ und $A = \frac{\varepsilon}{p}$, $\alpha = 0$.]

Versuch: Transformieren wir daher

$$\ddot{r} = -\varphi'(r) \quad \text{bei} \quad \varphi(r) = -\frac{1}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}$$

in der Zeit auf θ mit

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{r^2}, \quad \text{also} \quad t' = \frac{1}{\dot{\theta}(t)} = \frac{r^2}{\ell}$$

und im Raum mit

$$u(r) = \frac{1}{r}$$

(und hoffe auf $u'' + u = \frac{1}{p}$ (mit $p = p(\ell)$).

Dazu:

- $$-V'(r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3} = -u^2 + \ell^2 u^3$$

- $$u'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r(t(\theta))}\right) = -\frac{1}{r^2}\dot{r} \cdot t' = -\frac{\dot{r}}{\ell}$$

$$\Rightarrow \quad u''(\theta) = -\frac{1}{\ell}\ddot{r}\,t' = -\frac{\ddot{r}}{\ell^2} \cdot r^2 = -\frac{1}{\ell^2 u^2}\ddot{r}$$

$$\Rightarrow \quad u'' = -\frac{1}{\ell^2 u^2}\left(-\psi'(r)\right) = -\frac{1}{\ell^2 u^2}\left(-u^2 + \ell^2 u^3\right)$$

$$= -u + \frac{1}{\ell^2}$$

$$\Rightarrow \quad u(\theta) = \frac{1}{\ell^2} + A \cdot \cos(\theta + \theta_0),$$

wobei nach evtl. Drehung des KO-Systems $\theta_0 = 0$ angenommen werden kann. Die Bahn ist also tatsächlich eine Ellipse mit Latus rectum $p = \ell^2$ und der Exzentrizität $\varepsilon = \varepsilon(H, \ell) = Ap$, die noch berechnet wird.

$\blacksquare$

(2.9) Das 3. Keplersche Gesetz

(a) Wir tragen noch nach, dass jede Ellipse mit der Sonne als Brennpunkt als Bahn auftritt. Einsetzen von

$$H = H(0) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \varphi(r) = \frac{1}{2}\left((-\ell u')^2 + \left(-u + \frac{\ell^2}{2}u^2\right)\right)\Bigg|_{\theta = 0}$$

$$\overset{u'(0)=0}{\underset{\theta_0 = 0}{=}} -\left(\frac{1}{\ell^2} + A\right) + \frac{\ell^2}{2}\left(\frac{1}{\ell^2} + A\right)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{\ell^2} + \frac{1}{2\ell^2}\right) + \underbrace{\left(-1 + \frac{\ell^2}{2}\cdot 2\frac{1}{\ell^2}\right)}_{=0} A + A^2 \cdot \frac{\ell^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \frac{2}{\ell^2}\left(H + \frac{1}{2\ell^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\ell^4}\left(2\ell^2 H + 1\right).$$

Wegen $A > 0$ also

$$A = \frac{1}{\ell^2}\sqrt{1 + 2\ell^2 H}.$$

Insgesamt also:

$$p = \ell^2, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + 2H\ell^2}.$$

Möchte man eine Ellipse mit den Parametern $p > 0$ und $0 \leq \varepsilon \leq 1$ haben, so stelle man die Anf.-bed. $(r_0, \dot{r}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0)$ so ein, dass

$$\ell = \sqrt{p} \quad \text{und} \quad H = -\frac{1-\varepsilon^2}{2p}$$

ist. Dass dies mit $\theta_0 = 0$ geht, überlassen wir als Übungsaufgabe.

(b) Wegen der Konstanz der Flächengeschwindigkeit $\dot{A} = \frac{1}{2}\ell$ (siehe 2.?) und des Flächeninhalts der Ellipse mit den Hauptachsen $0 \leq b \leq a$ von

$$A(T) = \pi \cdot a \cdot b$$

(Transf.-formel mit der linearen Trafo $(x,y) \mapsto (ax, by)$) folgt:

$$\frac{1}{2} \ell T = \int_0^T \dot{A}(t)\, dt = A(T) = \pi a b,$$

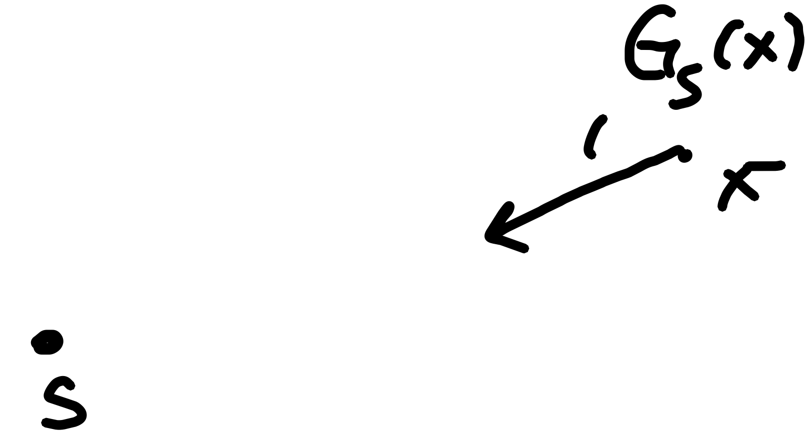
sowie $\ell^2 = p = b^2/a$, gilt:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{b^2/a} = 4\pi^2 \cdot a^3 \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 = \text{const.}$$

$\blacksquare$

§3. Himmelsmechanik

(3.1) Erinnere. (a) Sonne S (angenommen im Ursprung eines KO-Systems) löst durch ihre (schwere) Masse $m_S > 0$ an jedem Ort $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein Schwerefeld $G_S : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ aus,



Das führt dazu, dass ein (punktförmig gedachter) Körper der (schweren) Masse $m > 0$ an dem Ort x die Kraft $F(x) = m\, G_s(x)$ erfährt. Das 2. Newtonsche Gesetz besagt dann, dass die Bewegung $x : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dieses Körpers der gew. Dgl.

$$m \ddot{x} = F(x)$$

genügt, wo $m > 0$ die träge Masse des Körpers ist.

(b) Aus den Keplerschen Gesetzen hatten wir gesehen, dass für G_s gilt:

$$G_s(x) = -c_s \frac{x}{\|x\|^3},$$

wobei $c_S > 0$ eine Konstante ist, die nur von m_S abhängt.

(3.2) Idee. Das gleiche Schweregesetz wird auch für jeden Planeten gelten, etwa in Bezug auf die Bewegung seiner Monde. Im Prinzip löst das Schwerefeld der Erde auch eine Bewegung der Sonne aus! Das Feld $G_E : \mathbb{R}^3 \setminus \{x_E\} \to \mathbb{R}^3$ wird also

$$G_E(x) = -c_E \frac{x - x_E}{\|x - x_E\|^3}$$

sein, wobei $c_E > 0$ nur von m_E abhängt (und der

Ort der Erde als fest angenommen wird.)
Tatsächlich bewegen sich also Erde und Sonne
nach dem folgenden Bew.-gesetz auf

$$Q = \{ (x_S, x_E) \in \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : x_S \neq x_E \}$$

nach den Gleichungen

$$(1) \qquad m_S \ddot{x}_S = - m_S c_E \frac{x_S - x_E}{\| x_S - x_E \|^3}$$

$$(2) \qquad m_E \ddot{x}_E = - m_E c_S \frac{x_E - x_S}{\| x_E - x_S \|^3} .$$